# 第 12 講　求積問題

41　座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を $S$ とする．$S$ を $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V_1$ とし，$y$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V_2$ とする．

(1)　$V_1$ と $V_2$ の値を求めよ．

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ．

《12 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**42**

(1) $x$, $y$ を実数とし，$x>0$ とする．$t$ を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ．

(2) 次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を $S$ とする．

$x>0$ かつ，実数 $z$ で $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の全ての実数 $t$ に対して

$$0 \leqq xt^2+yt+z \leqq 1$$

を満たすようなものが存在する．

$S$ の概形を図示せよ．

(3) 次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を $V$ とする．

$0 \leqq x \leqq 1$ かつ，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の全ての実数 $t$ に対して，

$$0 \leqq xt^2+yt+z \leqq 1$$

が成り立つ．

$V$ の体積を求めよ．

《11 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

43　座標空間において，$xy$ 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 $S$ の4つの頂点を A$(-1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ -1,\ 0)$，D$(-1,\ -1,\ 0)$ とする．正方形 $S$ を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を $V_1$，直線 AC を軸として回転させてできる立体を $V_2$ とする．

(1)　$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 $t$ に対し，平面 $x=t$ による $V_1$ の切り口の面積を求めよ．

(2)　$V_1$ と $V_2$ の共通部分の体積を求めよ．

《13 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 12 講　求積問題

41 座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2,\quad \frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を $S$ とする．$S$ を $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V_1$ とし，$y$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V_2$ とする．

(1) $V_1$ と $V_2$ の値を求めよ．

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ．

《12 東大・理科》

**【答】** (1) $V_1=\dfrac{11}{480}\pi$，$V_2=\dfrac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi$　　(2) $\dfrac{V_2}{V_1}<1$

**【解説】** (1) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$ に代入して

$\dfrac{x^2}{4}+4\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2=\dfrac{1}{8} \iff \left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)=0$ より $x=\pm\dfrac{1}{2}$．このとき $y=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$．

また $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$ に $x=0$ を代入して $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$．

ここで $y=\dfrac{1}{2}x^2$ より $y^2=\dfrac{x^4}{4}$，$x^2=2y$ であり，$\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$ より $y^2=\dfrac{1}{32}-\dfrac{x^2}{16}$，

$x^2=\dfrac{1}{2}-16y^2$ なので，

$$V_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}\right)dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\pi\left(\frac{x^4}{4}\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}-\frac{x^4}{4}\right)dx=2\pi\left[\frac{x}{32}-\frac{x^3}{48}-\frac{x^5}{20}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{11}{480}\pi}$$

$$V_2=\int_0^{\frac{1}{8}}\pi(2y)\,dy+\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}\pi\left(\frac{1}{2}-16y^2\right)dy=\pi\left\{\left[y^2\right]_0^{\frac{1}{8}}+\left[\frac{y}{2}-\frac{16}{3}y^3\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}\right\}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi}$$

(2) (1)の結果より $\dfrac{V_2}{V_1}-1=\dfrac{1}{22}(40\sqrt{2}-57)=\dfrac{1}{22}(\sqrt{3200}-\sqrt{3249})<0$ より $\boldsymbol{\dfrac{V_2}{V_1}<1}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

42

(1)　$x$，$y$ を実数とし，$x>0$ とする．$t$ を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ．

(2)　次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を $S$ とする．

$x>0$ かつ，実数 $z$ で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 $t$ に対して

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

を満たすようなものが存在する．

$S$ の概形を図示せよ．

(3)　次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を $V$ とする．

$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 $t$ に対して，

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

が成り立つ．

$V$ の体積を求めよ．

《11 東大・理科》

**【答】**　(1)　$\begin{cases} x+y & (y\geqq 0 \text{ のとき}) \\ x+y+\dfrac{y^2}{4x} & (-x\leqq y<0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4x} & (-2x\leqq y<-x \text{ のとき}) \\ -x-y & (y<-2x \text{ のとき}) \end{cases}$　(2)　略　(3)　$\dfrac{17}{18}$

**【解説】**　(1)　$f(t)=x\left(t+\dfrac{y}{2x}\right)^2-\dfrac{y^2}{4x}$ より，最大値と最小値の差は

$$\begin{cases} -\dfrac{y}{2x}\leqq 0 \text{ のとき} & f(1)-f(0)=x+y \\ 0<-\dfrac{y}{2x}\leqq\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & f(1)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=x+y+\dfrac{y^2}{4x} \\ \dfrac{1}{2}<-\dfrac{y}{2x}\leqq 1 \text{ のとき} & f(0)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=\dfrac{y^2}{4x} \\ 1<-\dfrac{y}{2x} \text{ のとき} & f(0)-f(1)=-x-y \end{cases}$$

よって $\begin{cases} \boldsymbol{x+y} & \boldsymbol{(y\geqq 0 \text{ のとき})} \\ \boldsymbol{x+y+\dfrac{y^2}{4x}} & \boldsymbol{(-x\leqq y<0 \text{ のとき})} \\ \boldsymbol{\dfrac{y^2}{4x}} & \boldsymbol{(-2x\leqq y<-x \text{ のとき})} \\ \boldsymbol{-x-y} & \boldsymbol{(y<-2x \text{ のとき})} \end{cases}$



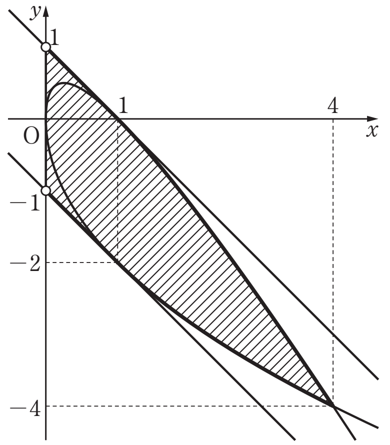
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(1)で求めた最大値と最小値の差が 1 以下であればよいので

$$\begin{cases} x+y \leqq 1 & (y \geqq 0 \text{ のとき}) \\ x+y+\dfrac{y^2}{4x} \leqq 1 & (-x \leqq y < 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4x} \leqq 1 & (-2x \leqq y < -x \text{ のとき}) \\ -x-y \leqq 1 & (y < -2x \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって
$$\begin{cases} y \leqq -x+1 & (y \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -2x-2\sqrt{x} \leqq y \leqq -2x+2\sqrt{x} & (-x \leqq y < 0 \text{ のとき}) \\ x \geqq \dfrac{1}{4}y^2 & (-2x \leqq y < -x \text{ のとき}) \\ y \geqq -x-1 & (y < -2x \text{ のとき}) \end{cases}$$

つまり $\begin{cases} -x-1 \leqq y \leqq -x+1 & (0 < x \leqq 1) \\ -2\sqrt{x} \leqq y \leqq -2x+2\sqrt{x} & (1 < x \leqq 4) \end{cases}$ となるので，$x=0$ を含まないで他の境界を含む図の斜線部分.




(3)　$f(t)$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を $M$，最小値を $m$ とすると $m+z \geqq 0$ かつ $M+z \leqq 1$

つまり $-m \leqq z \leqq 1-M$ となるので，$V$ は
$$\begin{cases} 0 \leqq z \leqq 1-(x+y) & (y \geqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4x} \leqq z \leqq 1-(x+y) & (-x \leqq y < 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{y^2}{4x} \leqq z \leqq 1 & (-2x \leqq y < -x \text{ のとき}) \\ -(x+y) \leqq z \leqq 1 & (y < -2x \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす $(x,\ y,\ z)$ の集合となる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$V$ を平面 $x=k\quad(0<k\leqq 1)$ で切った切り口は

$$\begin{cases} 0\leqq z\leqq 1-(k+y) & (y\geqq 0\ のとき) \\ \dfrac{y^2}{4k}\leqq z\leqq 1-(k+y) & (-k\leqq y<0\ のとき) \\ \dfrac{y^2}{4k}\leqq z\leqq 1 & (-2k\leqq y<-k\ のとき) \\ -(k+y)\leqq z\leqq 1 & (y<-2k\ のとき) \end{cases}$$

つまり $\begin{cases} -2\sqrt{kz}\leqq y\leqq -z+1-k & (0\leqq z\leqq k\ のとき) \\ -z-k\leqq y\leqq -z+1-k & (k\leqq z\leqq 1\ のとき) \end{cases}$ となるので，切り口の面積は

$$\int_0^k\{(-z+1-k)-(-2\sqrt{kz})\}dz+\int_k^1\{(-z+1-k)-(-z-k)\}dz$$

$$=\left[-\frac{1}{2}z^2+(1-k)z+\frac{4\sqrt{k}}{3}z\sqrt{z}\right]_0^k+(1-k)$$

$$=1-\frac{1}{6}k^2$$

となる．よって求める体積は $\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{1}{6}k^2\right)dk=\left[k-\frac{1}{18}k^3\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{17}{18}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**43** 座標空間において，$xy$ 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 $S$ の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする．正方形 $S$ を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を $V_1$，直線 AC を軸として回転させてできる立体を $V_2$ とする．

(1) $0\leqq t<1$ を満たす実数 $t$ に対し，平面 $x=t$ による $V_1$ の切り口の面積を求めよ．

(2) $V_1$ と $V_2$ の共通部分の体積を求めよ．

《13 東大・理科》

**【答】** (1) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}$　　(2) $\dfrac{32}{9}\sqrt{2}$

**【解説】** (1) $V_1$ の表面の $x+y\geqq 0$ の部分の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cos\frac{\pi}{4}\ \text{かつ}\ x+y\geqq 0$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=(-1,\ -1,\ 0)$ より

$$2-(x+y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{かつ}\ x+y\geqq 0$$

$$\iff\quad 0\leqq x+y\leqq 2\ \text{かつ}\ (2-x-y)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+z^2$$

$$\iff\quad 0\leqq x+y\leqq 2\ \text{かつ}\ z^2+2x+2y-2xy-2=0$$

となる．$x+y<0$ の部分は，対称性より $-2\leqq x+y<0$ かつ $z^2-2x-2y-2xy-2=0$ となる．

これら 2 式に平面 $x=t$ を代入すると

$$\begin{cases} 0\leqq t+y\leqq 2\ \text{かつ}\ z^2+2t+2y-2ty-2=0 \\ \qquad\text{または} \\ -2\leqq t+y<0\ \text{かつ}\ z^2-2t-2y-2ty-2=0 \end{cases}$$

$$\iff\quad \begin{cases} -t\leqq y\leqq -t+2\ \text{かつ}\ y=-\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1 \\ \qquad\text{または} \\ -t-2\leqq y<-t\ \text{かつ}\ y=\dfrac{z^2}{2(1+t)}-1 \end{cases}\quad\cdots①$$

となるが，$-\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1=\dfrac{z^2}{2(1+t)}-1\iff z=\pm\sqrt{2(1-t^2)}$ より，求める面積は

$$\int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{\left(-\frac{z^2}{2(1-t)}+1\right)-\left(\frac{z^2}{2(1+t)}-1\right)\right\}dz=\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{-\frac{2z^2}{1-t^2}+4\right\}dz$$

$$=\left[-\frac{2z^3}{3(1-t^2)}+4z\right]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}}$$

(2) $V_1$ の表面を表す不等式

$$\begin{cases} 0\leqq x+y\leqq 2\ \text{かつ}\ z^2+2x+2y-2xy-2=0 \\ -2\leqq x+y<0\ \text{かつ}\ z^2-2x-2y-2xy-2=0 \end{cases}$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

の $x$ に $-y$ を，$y$ に $x$ を代入することで $V_2$ の表面を表す不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq -y+x \leqq 2 \text{ かつ } z^2-2y+2x+2yx-2=0 \\ -2 \leqq -y+x < 0 \text{ かつ } z^2+2y-2x+2yx-2=0 \end{cases}$$

を得る．これに $x=t$ を代入して整理すると

$$\begin{cases} t-2 \leqq y \leqq t \text{ かつ } y=\dfrac{z^2}{2(1-t)}-1 \\ t<y \leqq t+2 \text{ かつ } y=-\dfrac{z^2}{2(1+t)}+1 \end{cases} \quad \cdots②$$

となるので，①，②より切り口の共通部分は $y \leqq -\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1$ かつ $y \geqq \dfrac{z^2}{2(1-t)}-1$ となり，

$-\dfrac{z^2}{2(1-t)}+1=\dfrac{z^2}{2(1-t)}-1$ より $z=\pm\sqrt{2(1-t)}$ なので，その面積は

$$\int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}}\left\{\left(-\frac{z^2}{2(1-t)}+1\right)-\left(\frac{z^2}{2(1-t)}-1\right)\right\}dz=\left[-\frac{z^3}{3(1-t)}+2z\right]_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

よって求める体積は

$$2\times\int_0^1\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}\,dt=2\left[-\frac{16\sqrt{2}}{9}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{32}{9}\sqrt{2}}$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。